Шифр: 10-18

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Волховский

Школа Волховская СОШ №1

Класс 10

ФИО Сюзев Иван Антонович

Чистовик	1	2	3	4	5	Σ
	7	7	7	0	×	21

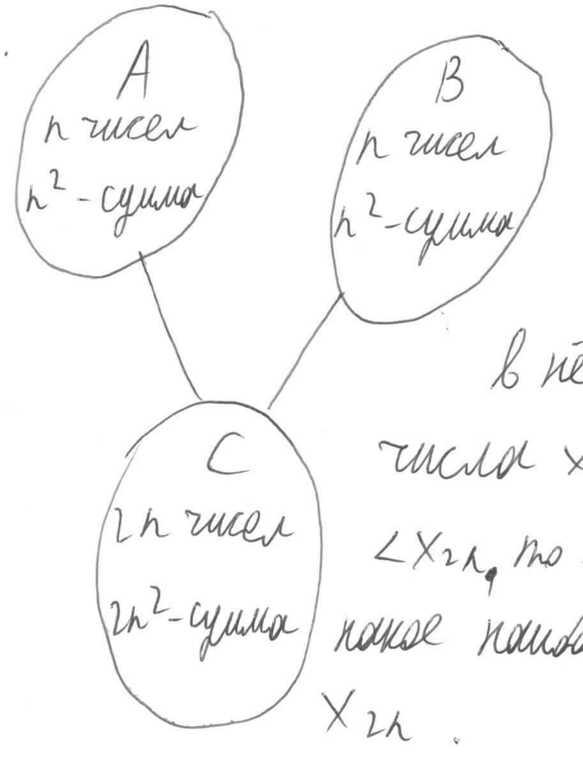
10–18

№1. Пусть $\overline{abcd}$ – такое число. Тогда для него верно $3990=abcd(a+b+c+d)$

Разложим 3990 на простые множители $3990 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$

19 не может быть цифрой в числе. Значит, сумма цифр равна 19 (предположим это, но сумма вообще не может быть больше 36 (4 девятки), но при этом $\vdots 19$, значит, она равна 19). Получается, произведение четырёх цифр равно 210, а сумма – 19. Такое возможно только при 1, 5, 6 и 7. Значит, число $\overline{abcd}$ – это различные перестановки этих цифр. Например: 1567 Ответ: 1567.

№2.



Объединим эти множества в одно – C, и рассмотрим числа в нём. Предположим, что все числа в нём различны. Пусть это будут числа $x_1; x_2; \dots; x_{2n}$, причём $x_1<x_2<x_3<\dots<x_{2n}$, то есть упорядоченные. Рассмотрим, какое наибольшее значение может принимать x_{2n}.

$$\underset{1}{\underset{\geqslant}{x_1}} + \underset{2}{\underset{\geqslant}{x_2}} + \dots + \underset{2n-1}{\underset{\geqslant}{x_{2n-1}}} + x_{2n} = 2n^2 \geqslant x_{2n} + (1+\dots+2n-1) = x_{2n} + \frac{(2n-1)\cdot 2n}{2} =$$

т.к. каждое следующее больше предыдущего.

$$= x_{2n} + n(2n-1)$$

$x_{2n} + n(2n-1) \le 2n^2$

$x_{2n} \le 2n^2 - 2n^2 + n$

10-18

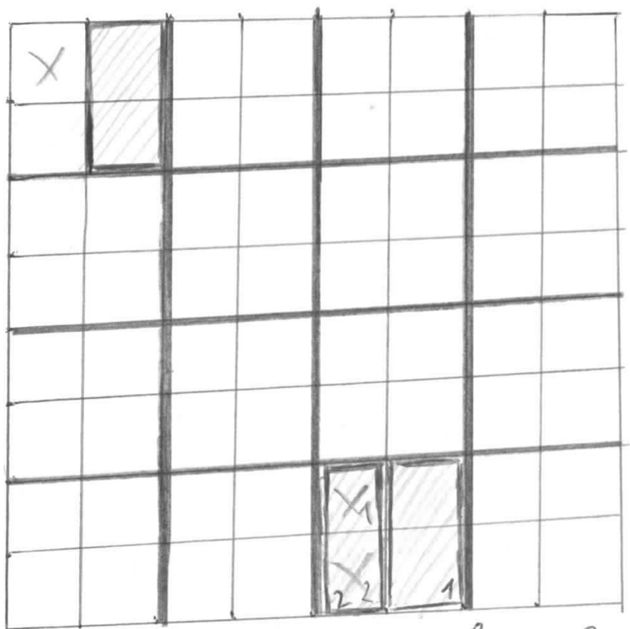
$x_{2n} \le n$ Но при этом $x_{2n} > x_{2n+1} \ge 2n-1$

Т.е. $n \ge x_{2n} > x_{2n+1} \ge 2n-1$, или $n > 2n-1$ $1 > n$

Но n – это кол-во чисел. Значит, n не может быть меньше 1.

Противоречие $\Rightarrow$ в наборе C есть одинаковые числа, а значит либо внутри набора A, либо внутри набора B, либо и в A, и в B присутствуют одинаковые числа. Первые два пункта невозможны из условия, а значит существует число, входящее в оба набора.

№3. Выиграет Дима. Разобьём поле на квадраты 2×2. Коля во время своего хода поставит крестик в один из квадратов. Дима в свой ход должен будет положить доминошку в этот же квадрат, не покрывая крестик.



В следующий ход Коля может поставить крестик в любой другой квадрат, и тогда мы будем делать то же самое: ставить доминошку на пустое место в квадрате. Рано или поздно квадраты у него закончатся, и он поставит крестик в квадрат, где лежит доминошка (он может это сделать до того, как у закончатся квадраты). Тогда мы покрываем два крестика в этом квадрате доминошкой, и квадрат больше не используется, т.к. полностью закрыт доминошками. Таким образом мы закроем абсолютно всё поле, после чего Коля не сможет поставить крестик.

Значит, Коля проиграет, а Дима — выиграет.

№4. Для $p=11$ $y=2$ $(py+1=23)$. Для всех остальных p $y=\frac{p-1}{2}$

Шифр: 2-10-11

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Волховский

Школа Волховская СОШ №1

Класс 10

ФИО Сюзев Иван Антонович

6	7	8	9	10	Σ
7	7	4	1	1	20

2-10-11

№10.6.

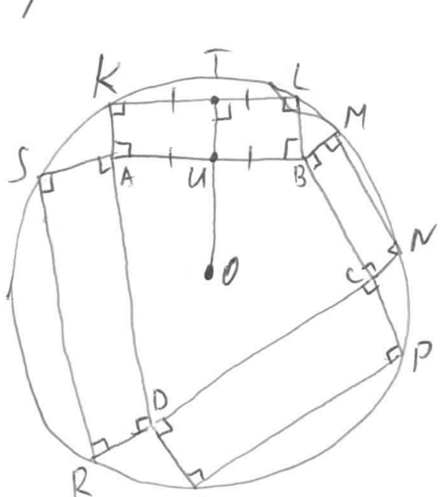
$$\cos x \xrightarrow{\cos x \cdot \cos x} \cos x \quad \cos^2 x \xrightarrow{\cos x + \cos^2 x} \cos x \quad \cos^2 x \quad \cos^2 x + \cos x$$

Подставим в выделенное выражение π.

$\cos^2\pi + \cos\pi = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ То есть мы за два шага получили выражение, которое при $x = \pi$ даёт ноль.

№10.7 Дано: см. чертёж | Док-ть: ABCD - впис. четыр. | Пусть O - центр окружности, описаной около KLMNPQRS - вершин прямоугольника. Значит, $OK = OL = OM = ON = OP = OQ = OR = OS$. $OK = OL \Rightarrow OT \perp KL$, где T - сер. KL $OT \perp KL$ и $AK \perp KL \Rightarrow OT \parallel AK$, а также $KT \parallel AU \Rightarrow AKTU$ - парал. и $AU = KT$, $\angle AUT = 180° - \angle KTU = 90°$, или $OU \perp AB$. $AU = KT = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}AB \Rightarrow U$ - сер. AB. U - сер. AB и $OU \perp AB \Rightarrow OA = OB$ (OU - высота и медиана в $\triangle OAB \Rightarrow \triangle OAB$ - равноб.). Аналогично доказывается, что $OB = OC$; $OC = OD$ и $OD = OA$. Значит $OA = OB = OC = OD$, или O - центр описанной окружности около $ABCD \Rightarrow ABCD$ - вписанный четырёхугольник.

Чертёж:



№10.8. Пусть n многочленов выглядят так: $a_1x^2+b_1x+c_1$; ..... ; 2-10-11

$a_nx^2+b_nx+c_n$, где $a_i; b_i; c_i \in \{k; k+1; \dots; k+3n-1\}$, $i \in \{1; \dots; n\}$ и не повторяются. $a_ix^2+b_ix+c_i$ имеет два целых корня x_1 и $y_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1+y_1 = \frac{-b_i}{a_i} \in \mathbb{Z} \\ x_1 \cdot y_1 = \frac{c_i}{a_i} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$, значит $b_i \vdots a_i$ и $c_i \vdots a_i$. Следовательно, или

$b_i \geqslant 3a_i$, или $c_i \geqslant 3a_i$. Значит $3a_i$ тоже принадлежит

множеству от k до $(k+3n-1)$. Всего n различных a, значит,

наибольшее из $a \geqslant k+n-1$, но $3a \leq k+3n-1$

$3(k+n-1) \leq k+3n-1$

$3k+3n-3 \leq k+3n-1$

$2k \leq 2$

$k \leq 1$, но $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k=1$ и ряд начинается с единицы.

Пусть $3n = 4k+m$, где $m = \{0; 1; 2; 3\}$

Тогда для всех чисел l от $k+1$ до n $4 \cdot l > 3n$, а значит

все ур-ия, составленные с ними как со старшими коэф-ами

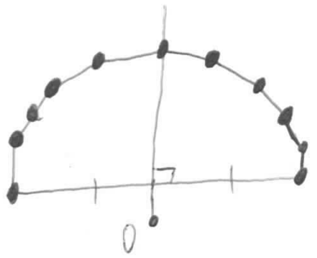
имеют вид: $lx^2+3lx+2l=0$, т.е. число $3l$ принадлежит

множеству $\{1; \dots; 3n\}$, а $4l$ не принадлежит; и все эти ур-ия

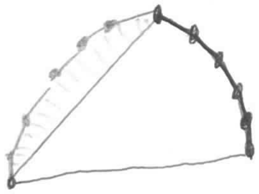
имеют целые корни: -1 и -2.

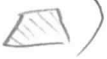
2-10-11

№.10.9 Давайте отрежем от правильного многоугольника какой-то многоугольник с нечётным кол-вом сторон и предположим, что он хороший. Отрезанный нами многоугольник может выглядеть по разному. Заметим, что все вырезанные многоугольники вписаны в окружность большого многоугольника, и все отрезаные многоугольники вида, изображённого слева (состоящие из одной диагонали) симметричны относительно диаметра окружности, перпендикулярного диагонали, а значит с обеих сторон этого диаметра располагается одинаковое число сторон, т.к. всего их чётное кол-во (если не считать диагональ), значит, диагональ не параллельна ни одной из сторон. Значит, в многоугольнике есть пара параллельных рёбер, такое принадлежавшие правильному многоугольнику, такое возможно только в $2n$-угольнике и только с противоположными сторонами. Так как мы не пропускали никаких сторон, то всего у нас как минимум $n+1$ сторона от правильного многоугольника, т.е. оставшуюся часть мы не сможем разрезать на части с $2n+2$ сторонами (вместе с диагональю), т.к. в оставшейся части n сторон (вместе с диагональю).



В следующем разрезе рёбра не могут быть параллельны, иначе их будет слишком много (если взять 2n-угольник, то рёбер вместе с разрезами будет $n+3$ или более, а у оставшихся кусков меньше или равно, чем $n+1$ на двоих; а если взять $2n+1$ угольник, то в нём рёбра не бывают параллельны). Значит, в нём одно из рёбер параллельно диагонали. ~~Такое бывает только в 2n угольнике. Значит, в отрезанном нами многоугольнике хотя бы~~ $\cancel{\frac{n+1}{2}}$ ~~рёбер.~~

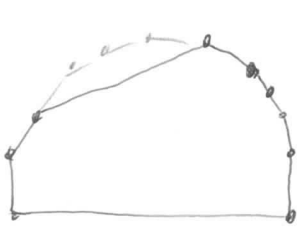


Тогда рёбер в отрезанном многоугольнике больше, чем в лишней части (), из-за чего так тоже нельзя отрезать

Осталась последняя ситуация, разбитая на две: два ребра параллельны и диагональ параллельна ребру (диагональ не может быть параллельна другой, т.к. они бы занимали бы равно число рёбер, и всего было бы чётное число сторон, что не удовлетворяет условию)

I) Одно из рёбер параллельно диагонали.

Эта ситуация сводится к предыдущей, только в остатке ещё меньше рёбер



II) Два ребра параллельны.

При таком разрезе получаются два изшика с разным по чётности кол-ву рёбер, значит, его нельзя так разрезать ⇒ никак нельзя разрезать правильный многоугольник на многоугольники так, как надо в условии.

№10.10. Допустим, мы попросили Петю сказать значения функций при 6 числах. Если Петя сказал 3 значения $f(x)$, и 3 значения $g(x)$, то мы не сможем назвать ни одну из функций, т.к. взяв любые три точки мы получим различные параболы (или прямые), и не сможем точно сказать ур-ие одной из $f(x)$ или $g(x)$. Значит, нам нужно хотя бы 7 значений. Начнём разбирать ситуации.

Первое число означает, сколько значений принадлежат только первой функции, второе - точки пересечения, третье - точки, принадлежащие второй функции. $t_1; \dots; t_7$ - эти точки.

$$\underbrace{\underset{t_1 \dots t_7}{7}} \quad 0 \quad 0$$

Стоит отметить, что любые три точки единственным образом задают параболу (или прямую)

Воспользовавшись формулой графика функции степени не более $(n-1)$ по n точкам: $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)$

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot y_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n$$

. В первом случае подставив 7 получившихся точек получим ур-ие не более 2 степени, т.к. все 7 точек принадлежат одной из $f(x)$ и $g(x)$, и, воспользовавшись формулой, сможем восстановить функцию. Нам интересны наборы чисел, состоящие хотя бы из четырёх чисел и лежащие на одной параболе (или прямой). Обозначать их будем так: $\underbrace{\qquad}$

6 1 0

$t_1;\dots;t_6$ t_7

6 0 1

$t_1;\dots;t_6$ t_7

5 2 0

$t_1;\dots;t_5$ $t_6;t_7$

5 0 2

$t_1;\dots;t_5$ $t_6;t_7$

5 1 1

$t_1;\dots;t_5$ t_6 t_7

4 0 3

$t_1;\dots;t_4$ $t_1;t_2;t_3$

Опять по формуле восстанавливаем параболу (прямую).

Тем самым я хотел показать то, что какие бы значения какой-либо функции Петя не называл, мы можем восстановить параболу по 4 точкам (или большему кол-ву, но 4 - достаточно)

4 1 2

$t_1;\dots;t_4$ t_5 $t_6;t_7$

4 2 1

$t_1;\dots;t_4$ $t_5;t_6$ t_7

3 2 2

$t_1;t_2;t_3$ $t_4;t_5$ $t_6;t_7$

3 1 3

$t_1;t_2;t_3$ t_4 $t_5;t_6;t_7$

Заметим, что в центральном столбце все числа не больше 2, т.к. точек пересечения у $f(x)$ и $g(x)$ не больше двух, т.к. они оба не более чем 2 степени; и что в последних двух случаях мы восстановим обе функции. Значит, $n \geq 7$. Ответ: $n = 7$